Osově namáhaný prut – základní veličiny

Normálová síla působící v průřezu osově namáhaného prutu se získá integrací normálového napětí po ploše průřezu.

$$N = \int_A \sigma_x \, dA$$

Vzhledem k rovnoměrnému rozložení napětí integrál přechází v jednoduchý vztah

$$N = \sigma A \quad \text{nebo} \quad \sigma_x = \frac{N}{A}$$

Vztah mezi normálovým napětím a poměrnou deformací je dán Hookovým zákonem

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad \text{nebo} \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

Po dosazení z předchozí rovnice

$$\varepsilon_x = \frac{N}{EA}$$

Poměrné přetvoření může být také způsobeno teplotním namáháním. V tomto případě záleží na rozdílu současné a původní teploty Δt a na součiniteli teplotní roztažnosti α_t.

$$\varepsilon_t = \alpha_t \Delta t$$

Změna teploty způsobuje u staticky určité konstrukce pouze změnu deformační veličin, tedy poměrného přetvoření a posunutí. Silové veličiny – napětí a vnitřní síly zůstávají nedotčeny. Naopak u staticky neurčitě podepřených konstrukcí vznikají nenulové i silové veličiny.

Vztah mezi poměrnou deformací a posunutím je dán geometrickou podmínkou

$$u' = \varepsilon_x$$

Integrací vztahu se získá

$$u = \int \varepsilon_x \, dx + C$$

Integrační konstantu C je možné určit z okrajové podmínky a tou je posun pro $x = 0$. Pomocí tohoto známého posunu v bodě a je možno vyjádřit posun v libovolném bodě b.

$$u_b = \int_a^b \varepsilon_x dx = \int_a^b \frac{N}{EA} dx$$

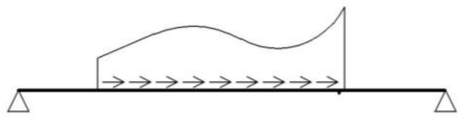
Pro veličiny N, E a A, konstantní v jednotlivých částech prutu, přejde integrál v sumační vyjádření

$$u_b = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i l_i}{E_i A_i}$$

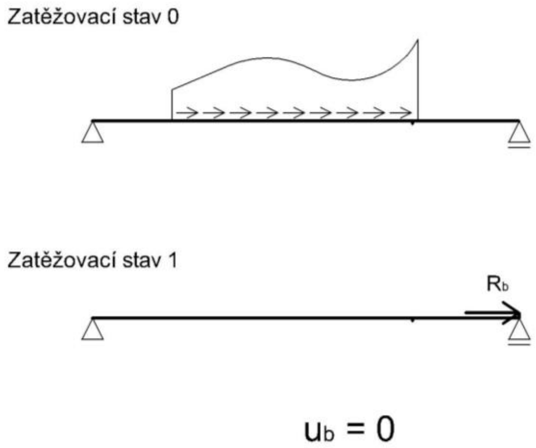
Staticky neurčité podepření - Silová metoda

Při řešení staticky neurčitého osově namáhaného prutu je vhodná silová metoda.
V silové metodě se nejdříve zvolí staticky určitá základní soustava odebráním vazby proti posunutí.
Ve vazbě působila reakce, ta je uvažována jako neznámá síla.
Vazba zajišťovala předepsaný (většinou nulový) posun bodu prutu, ten se zajistí přídavnou podmínkou pro tento posun.

Následně se vyjádří předepsaný posun uvolněného bodu prutu, způsobený zatížením a neznámou reakcí. V této rovnici je jedinou neznámou hledaná reakce a je tímto způsobem získána. Druhou reakci je pak možno určit ze statické podmínky rovnováhy pro celý prut.



Původní konstukce



Zatěžovací stavy základní staticky určité soustavy + doplňující deformační podmínka.

Staticky neurčité případy– ohybová analogie

Obecnou metodou pro řešení staticky neurčitých případů podepření taženého prutu je silová metoda. V určitých případech je možné použít snadnější metodu, která vychází z analogie s ohýbaným prutem.

Statické diferenciální podmínky pro ohýbaný prut představují silovou podmínku do svislého směru a momentovou podmínku rovnováhy na diferenciálním elementu prutu. Mají tvar :

$$V' = -q$$

$$M' = V$$

Statická podmínka pro tažený prut

$$N' = -n$$

Geometrická podmínka pro tažený prut

$$u' = \frac{N}{EA}$$

Pří zavedení substituce

$$\overline{q} = n$$

$$\overline{V} = N$$

$$\overline{M} = EAu$$

Můžeme podmínky taženého prutu zapsat ve tvaru

$$\overline{V'} = -\overline{q}$$

$$\overline{M'} = \overline{V}$$

Tyto podmínky jsou obdobné podmínkám statickým podmínkám pro ohýbaný prut. Je možné je řešit stejným způsobem, jako se postupuje při řešení průběhů vnitřních sil na ohýbaném nosníku – tedy počítat hodnoty vnitřních sil ohýbaného nosníku z podmínek rovnováhy na části nosníku.

Problémem jsou pouze okrajové podmínky na tomto fiktivním nosníku zatíženým $\overline{q}(x)$. Pokud chceme pracovat s normálovou silou jako s posouvající silou a s vodorovným posunem jako s momentem, musíme na fiktivním nosníku zajistit, aby podepření vyjadřovalo takové okrajové podmínky pro posouvající síly a momenty, jaké jsou platné na skutečném nosníku pro normálové síly a vodorovný posun.

Tyto podmínky se snadno splní pro tažený prut, oboustranně neposuvně upnutý. Normálové síly jsou v obou podporách nenulové, zatímco posunutí je nulové. Na fiktivním nosníku je třeba zajistit nenulovou posouvající sílu a nulový moment. Tomu odpovídá prosté podepření nosníku.

Uvedená formulace metody je omezena silovým zatížením a konstantní tuhostí.

Pro určení průběhu normálových sil na skutečném nosníku stačí vyřešit průběh posouvajících sil na fiktivním nosníku. Je třeba dodržovat správné konvence (pro které byly odvozeny diferenciální podmínky) pro zatížení a reakce při převádění ze skutečného nosníku na fiktivní a zpět. Kladné osové zatížení je v kladném směru osy x, kladné příčné zatížení je ve směru kladné osy z.

Tuhý nosník zavěšený na táhlech

V případech nosníků břemen zavěšených na táhlech předpokládáme, že táhla přenáší pouze normálovou sílu a jsou deformovatelná. Naopak pokud je nosník dostatečně tuhý, zavádíme předpoklad dokonale tuhého prvku.

Pro normálové síly v táhlech, popřípadě pro další reakce působící na nosník je možno napsat podmínky pro obecnou soustavu sil.

Pokud se jedná o staticky neurčitou soustavu je počet statických podmínek rovnováhy nedostačující a je třeba přidat ještě další podmínky k určení zbývajících sil.

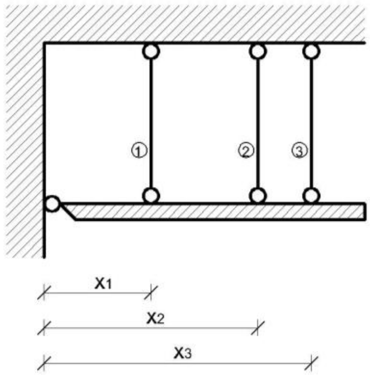
Tyto podmínky se nazývají geometrické a určí se na základě geometrických závislostí na deformované konstrukci. Z tohoto schématu se určí závislosti mezi jednotlivými protaženími táhel. Pomocí vzorce pro protažení prutu

$$\delta_i = \frac{N_i l_i}{E_i A_i}$$

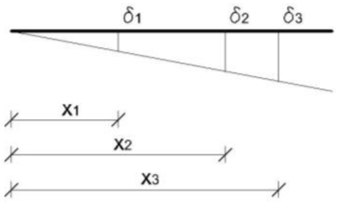
se tyto rovnice převedou na vztahy mezi normálovými silami a tím se získají zbývající podmínky pro určení sil v táhlech.

Ukázka deformačních podmínek pro některá schémata

Schéma 1 – kloubově uložený prut, svislá táhla



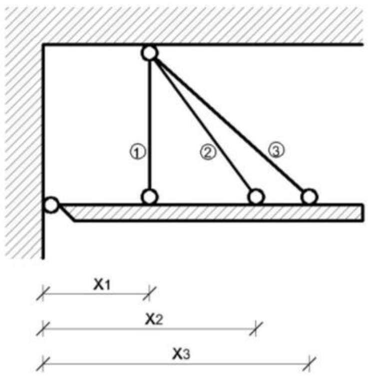
Deformační schéma: předpokládá se, že prut se otáčí kolem kloubu, protažení táhel se rovná svislému posunu bodu závěsu. (vodorovné posuny se zanedbávají)



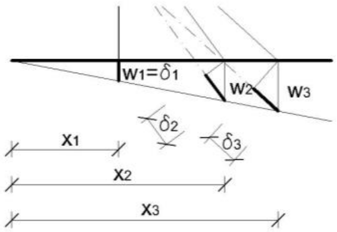
$$\delta_2 = \frac{x_2}{x_1}\delta_1$$

$$\delta_3 = \frac{x_3}{x_1}\delta_1$$

Schéma 2 – kloubově uložený prut na šikmých táhlech



Deformační schéma: předpokládá se, že prut se otáčí kolem kloubu, protažení táhel se určí ze svislých posunů bodů závěsu. (změny směru táhel a vodorovné posuny se zanedbávají)

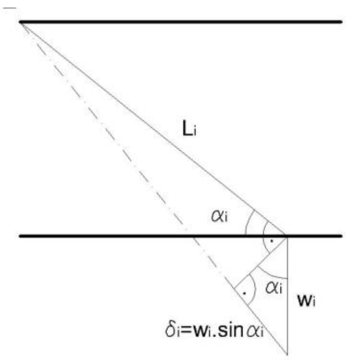


Podmínky pro svislé posuny lze určit z podobnosti trojúhelníků.

$$w_2 = \frac{x_2}{x_1} w_1$$

$$w_3 = \frac{x_3}{x_1} w_1$$

Vztah mezi svislým posunem a protažením táhla lze určit z pravoúhlého trojúhelníku na obrázku, pokud zanedbáme změnu úhlu naklonění táhla i vodorovný posun místa závěsu.



Získá se následující vztah

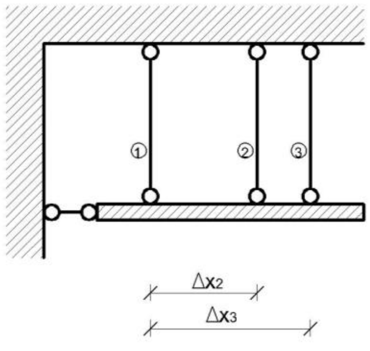
$$\delta_i = w_i \sin \alpha_i$$

Po dosazení do deformační podmínky lze v konkrétním případě vyjádřit tyto podmínky v protažení táhel následovně:

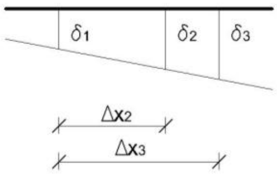
$$\delta_2 = \frac{x_2 \sin \alpha_2}{x_1 \sin \alpha_1} \delta_1 = \frac{x_2 \sin \alpha_2}{x_1} \delta_1$$

$$\delta_3 = \frac{x_3 \sin \alpha_3}{x_1 \sin \alpha_1} \delta_1 = \frac{x_3 \sin \alpha_3}{x_1} \delta_1$$

Schéma 3 – prut se zabráněným vodorovným posunem, svislá táhla



Deformační schéma: předpokládá se posun a natočení prutu jako celku. Deformační podmínky lze získat z vyjádření směrnice nakloněné přímky.



$$\frac{\delta_2 - \delta_1}{\Delta x_2} = \frac{\delta_3 - \delta_1}{\Delta x_3}$$

Břemeno zavěšené na táhlech – deformační metoda

Břemeno a normálové síly v táhlech představují rovinný svazek sil, pro nějž je možno napsat dvě statické podmínky rovnováhy.

$$\sum F_{x,i} = 0$$

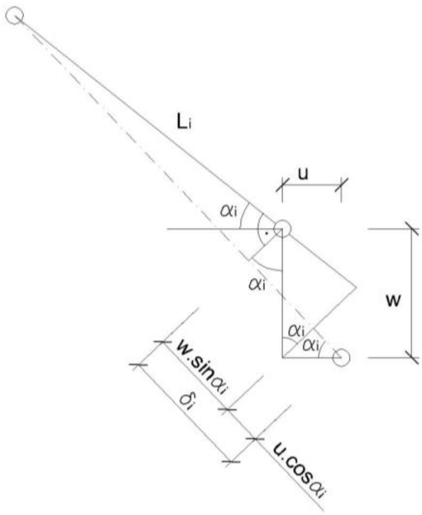
$$\sum F_{z,i} = 0$$

Pokud je táhel více než dvě, jedná se o staticky neurčitou soustavu. Počet statických podmínek rovnováhy nedostačující a je třeba přidat ještě další podmínky k určení zbývajících sil.

Tyto podmínky se nazývají geometrické a určí se na základě geometrických závislostí na deformované konstrukci.

V případě možného a vodorovného posunu *u* i svislého posunu *w* konce táhla, je třeba při vyjádření protažení táhla vzít oba tyto posuny v úvahu.

Následující obrázek ilustruje odvození závislosti. (změna úhlu naklonění prutu se zanedbává.)



$$\delta_i = w.\sin\alpha_i + u.\cos\alpha_i$$

Pomocí vzorce pro protažení prutu

$$\delta_i = \frac{N_i l_i}{E_i A_i}$$

je možné dát do souvislosti Normálové síly v táhlech a deformace táhel. V tomto případě je vhodnější za primární neznáme si zvolit deformační veličiny *u*, *w* a pomocí nich vyjádřit normálové síly v táhlech.

$$\delta_i = w.\sin\alpha_i + u.\cos\alpha_i = \frac{N_i L_i}{E_i A_i}$$

Odtud normálová síla

$$N_i = \frac{E_i A_i}{L_i}\left(w.\sin\alpha_i + u.\cos\alpha_i\right)$$

Po dosazení deformačních vztahů do statických podmínek se získá soustava dvou rovnic o pro dva neznámé posuny u, w. Po vyřešení posunů je možné je zpětně dosadit do deformačních vztahů a určit normálové síly v táhlech.

Tento postup, kdy primární neznámé jsou deformační veličiny a soustavu rovnic tvoří statické podmínky rovnováhy, se nazývá deformační metoda.

V jednodušších případech je možné postupovat i silovou metodou. Pak je třeba v deformačních podmínkách vyloučit neznámé posuny, tak aby deformační podmínky představovaly vztahy mezi protažením táhel. Tyto podmínky se vyjádří v normálových silách a přidají je k statickým podmínkám.